2024中国大学生程序设计竞赛(郑州站)题解

China Collegiate Programming Contest 2024 (Zhengzhou Site) Tutorial

南京大学出题组

Problem Setters

南京大学出题组名单(按照姓名字典序排序):
Hongyi Chen (chychy)
Tianxing Ding (skyline)
Hongyang Liu (gisp_zjz)
Chunyang Wang (Roundgod)
Xinyuan Zhang (triple__a)
Xin Zheng (Weierstrass)
外部出题人:
Jiachen Tang (oscar)

本次南京大学出题组成员均来自南京大学理论计算机科学组。
组内主页为:`https://tcs.nju.edu.cn`, 欢迎大家了解并加入!

赛前估计题目难度

Easy: L
Medium-Easy: BFM
Medium: CGK
Medium-Hard: AEJ
Hard: DI
Very Hard: H

L. Z-曲线

题目描述

给定一个Z形曲线从L到R的一个有向片段，求最早出现该片段的位置。

数据范围：$0 \le L < R \le 10^{18}$;
出题人：Xinyuan Zhang (triple__a)

L. Z-曲线

解法1

- 注意到一个大的Z-曲线实际上可以由四个小的Z-曲线拼成，这启发我们使用递归求解。
- 具体来说，假设给定的Z-曲线片段位于右上、左下或者右下，我们可以将该Z-曲线平移至左上对应的位置；假设给定的Z-曲线片段位于下方，我们可以平移至上方对应的位置。
- 时间复杂度：单组$O(\log R)$。

L. Z-曲线

解法2

- 考虑L与R的二进制表示，从最高位往最低位进行遍历，若L与R在该位不一致则输出L；否则将L与R的这一位更改为0。
- 时间复杂度：单组$O(\log R)$.

B. 滚动石子

题目描述

给定一个每个格子上有$1-4$的数字的大小为n的三角形棋盘和一个正四面体的骰子，要求滚动骰子最小次数使得骰子到达指定位置，并满足以下要求:

- 棋盘上的每个位置只能访问至多一次;
- 当骰子到达棋盘上的每个位置的时候，骰子底面上的数字必须和棋盘对应位置的数字相同。

数据范围: $1 \le n \le 100$;
出题人: Chunyang Wang (Roundgod) and Xin Zheng (Weierstrass)

B. 滚动石子

观察

可以发现，正四面体骰子在棋盘上某个位置时，其底面数字是固定的。

解法

- 容易预处理出正四面体骰子在棋盘上每个位置时的底面数字，此时问题转化为棋盘上有一些位置可以到达有些位置不能到达，问从起点到终点不重复经过任何一个位置的最小步数。
- 此时可以发现“不重复经过任何一个位置”条件无用，用BFS寻找最短路即可。
- 时间复杂度$O(n^2)$。

F. 无限循环

题目描述

一天有k个小时。每天有n个任务，第i个任务在第a_i小时派发，需要花费b_i小时完成。所有任务按照顺序完成。回答以下Q个询问：

- 第x_i天的第y_i个任务最早在哪时候完成。

数据范围：$k \le 10^8$，$x_i \le 5 \times 10^5$，其他参数不超过10^5;
出题人：Tianxing Ding (skyline)

F. 无限循环

解法

- 假设从第一天起的第i个任务第p_i小时接到并需要q_i小时来完成。
- 那么第i个任务的实际开始时间是：

$$\max_{j=1}^{i}(p_j + \sum_{t=j}^{i-1} q_t)$$

.

- 令$S = \sum_{i=1}^{n} b_i$.
- 当$S \geq k$，上式一定有最值在$j \leq n$时取到，所以除第一天外每天的第i个任务的完成时间是公差为S的等差数列；
- 当$S < k$，上式一定有最值在$j > i - n$时取到，所以除第一天外每天的第i个任务的完成时间是公差为k的等差数列。
- 模拟前两天的工作，计算其完成时间即可。
- 时间复杂度$O(n)$。

M. 拒绝采样

题目描述

给定参数$a_1, a_2, \ldots, a_n$，需要设计概率参数$p_1, p_2, \ldots, p_n$，一个拒绝采样算法每轮会以p_i的概率选择i，直到选到的集合size恰好为k时输出。要求满足：

1. $\sum p_i = k$;
2. 对于任意$S \subseteq \binom{[n]}{k}$，算法输出$S$的概率正比于$\prod_{i \in S} a_i$。

数据范围：$1 \le k < n \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^9$;

出题人：Hongyang Liu (gisp_zjz)

M. 拒绝采样

解法

- 对于给定$S \subseteq \binom{[n]}{k}$，算法输出$S$的概率为

$$\prod_{i \in S} p_i \prod_{i \notin S} (1 - p_i)$$

- 要满足"输出的分布正确"的充要条件是$\frac{p_i}{1-p_i} \propto a_i$。
- 不妨设$\frac{p_i}{1-p_i} = ca_i$，解得$p_i = \frac{ca_i}{1+ca_i}$。可以发现$p_i$关于$c$是单调增的。
- 现在由于要求$\sum p_i = k$，由于p_i关于c的单调性，二分c即可。

特别注意：本题中c最小可能达到$\frac{1}{n \cdot \max a_i}$，直接二分$c$时要注意二分次数不能太少。处理这种情况有一个技巧是改为二分$\log c$，这样二分次数可以大幅降低。

C. 中点

题目描述

给定初始格点集合$S = \{(0,0),(A,0),(0,B),(A,B)\}$，通过尽可能少的添加中点操作得到格点$(X, Y)$。

数据范围：$0 \le X \le A \le 10^9$, $0 \le Y \le B \le 10^9$;
出题人：Tianxing Ding (skyline)

C. 中点

解法

- 通过k次操作能得到的点集为

$$S_k = \left\{ \left(\frac{Ax}{2^k}, \frac{By}{2^k} \right) \mid 0 \le x, y \le 2^k \right\}.$$

- 这是因为$S_{k+1} = \frac{S_k + S}{2}$，其中$\frac{U+V}{2} = \{\frac{u+v}{2} \mid u \in U, v \in V\}$。
  - 简要证明：对于所有的$i, j \in \{0, 1\}$，我们有

$$\frac{S_k + \{(iA, jB)\}}{2} = \left\{ \left(\frac{A(x + 2^k i)}{2^{k+1}}, \frac{B(y + 2^k j)}{2^{k+1}} \right) \mid 0 \le x, y \le 2^k \right\}.$$

- 若给定$(X, Y) \in S_k$，上述证明已经说明存在$(X', Y') \in S_{k-1}$满足(X', Y')和$(0, 0), (A, 0), (0, B), (A, B)$中某个点取中点后得到$(X, Y)$，因此递归构造即可。
- 时间复杂度$O(\log(\max(A, B)))$。

G. 配对

题目描述

给定一个非负整数序列$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$，设计一个数据结构维护以下更新操作以及回答询问。

- 区间加w;
- 区间查询：是否能将区间内的数两两配对，使得和相等。

数据范围：$n, q, w \leq 2 \cdot 10^5$;
出题人：Tianxing Ding (skyline) and Jiachen Tang (oscar)

G. 配对

解法

- 考虑维护一下区间信息：
  - 矩母函数$M_+(x) = \sum_{i \in [L,R]} x^{a_i}$，$M_-(x) = \sum_{i \in [L,R]} x^{-a_i}$；
  - 区间平均值m。
- 满足条件当且仅当$M_+(x) = x^{2m} M_-(x)$。
- 考虑随机x作为哈希值进行判定即可。
- 时间复杂度：$O(n \log n)$。
- 标准程序使用10^{18}量级的模数以及两个随机x作为hash值，可以保证正确率不低于$1 - 10^{-12}$。

特别注意：维护前$k = \Theta(\log n)$阶矩$\sum_{i \in [L,R]} a_i^k$是错误解答。事实上，可以构造出前$\Theta(\log n)$阶矩一致，但本质不同的两个序列。

K. 土豆兄弟

题目描述

土豆兄弟游戏共有n个关卡，你需要按顺序挑战，每次挑战的失败率为p，一旦失败你需要从头开始挑战。现在给你k次使用道具机会，允许失败后不是从头挑战而是从当前失败关卡开始。问最优策略下通关需要的挑战关卡次数期望。

数据范围：$1 \le n \le 10^5, 0 \le k \le 10^9, np \le 20$;
出题人：Hongyang Liu (gisp_zjz)

K. 土豆兄弟

观察1

- 如果我们拥有无限道具，并采取一旦失败就使用道具的策略，通关时期望的使用道具次数是$\frac{np}{1-p}$。
- 注意到$np \le 20$的限制，所以当k很大时我们可以认为可以采取上述策略以极高概率通关。
- 事实上，当$k > 165$时，答案可以直接近似为$\frac{n}{1-p}$。

观察2

- 当"道具数"较小时，我们会尽可能地将道具留在后面的关卡使用。
- 当挑战失败时，我们会决策是/否使用道具。当"道具数"确定时，这一决策是单调的：存在t，在第t关之前失败我们会选择从头开始，在第t关之后失败我们会选择使用道具。

K. 土豆兄弟

解法

- 当k较小时，考虑dp，令$f_{i,j}$表示当前有i次道具，已经通过j关时的最小挑战次数期望。
- 如果当前已经通过j关，根据单调性，在第j关失败时不会使用道具，则失败后在到达第$j+1$关之前，都不会再使用道具。
- 从第j关，不使用道具直到通过第$j+1$关的期望次数为$\left(\frac{1}{1-p}\right)^{j+1}$。
- 转移：

$$f_{i,j} = \min\left(1 + pf_{i-1,j} + (1-p)f_{i,j+1}, \left(\frac{1}{1-p}\right)^{j+1} + f_{i,j+1}\right)$$

- 复杂度：$O(nk)$（对于k较小的case）

A. A+B=C 问题

题目描述

给定三个正整数pA, pB和pC，构造三个无穷长二进制串A, B和C，满足

1. A, B, C的周期分别为pA, pB与pC；
2. $A \oplus B = C$。

数据范围: $1 \le pA, pB, pC \le 10^6$;
出题人: Xinyuan Zhang (triple__a)

A. A+B=C 问题

解法

- 充要条件：
  - $pA|\mathrm{lcm}(pB, pC)$, $pB|\mathrm{lcm}(pA, pC)$, $pC|\mathrm{lcm}(pA, pB)$;
  - $(pA, pB, pC) \neq (2, 2, 2)$（请务必小心这一边界情形）。
- 例子：$(pA, pB, pC) = (6, 10, 15)$是存在解的。
- 必要性是显然的；我们下面只考虑充分性的证明（即构造解的存在性）。
- 注意到充要条件第一点等价于存在正整数$g \geq 1$以及两两互质的正整数$p, q, r \geq 1$满足$pA = gpq$，$pB = gpr$，$pC = gqr$。我们将按照如下规则进行分类构造：
  1. $p = q = r = 1$ 且$g \neq 2$;
  2. $p = q = 1$ 且$r > 1$;
  3. $q, r > 1$。

A. A+B=C 问题

为了方便起见，我们仅用前pA, pB, pC个字符代表无穷长01串A, B, C。

情形1: $p = q = r = 1$ 且$g \neq 2$

- $g = 1$: $(0, 0, 0)$即满足条件；
- $g \geq 3$: $(\mathbf{0}_{g-2}01, \mathbf{0}_{g-2}10, \mathbf{0}_{g-2}11)$满足条件，其中$\mathbf{0}_{g-2}$表示长度为$g-2$的全0串。

情形2: $p = q = 1$ 且$r > 1$

- 令$A = \mathbf{0}_{g-1}1$，$B = \mathbf{0}_{rq-1}1$，$C = A \oplus B$，此时(A, B, C)满足条件。

A. A+B=C 问题

情形3: $q, r > 1$

- 令$P = \mathbf{0}_{p-1}1$，$Q = \mathbf{0}_{q-1}1$ 且$R = \mathbf{0}_{r-1}1$;
- 对于任意的$0 \le i < gpq$，

$$A_i = P_{\lfloor \frac{i}{g} \rfloor \mod p} \oplus Q_{\lfloor \frac{i}{g} \rfloor \mod q}$$

- 同样的，我们可以构造B，C，不难验证构造满足条件。

A. A+B=C 问题

情形3构造的一点解释

- 当$g \geq 1$时，我们将$i, i+g, i+2g, \ldots$等位置提取出来，变成g个子问题求解（需要注意这里可能会出现拼接的问题）；
- 我们不妨假设$g=1$，此时我们需要满足的异或条件可被写为：
  - 对于任意的$0 \leq i < pqr$，我们有$A_i \oplus B_i \oplus C_i = 0$。
- 由中国剩余定理，$0 \leq i < pqr$与$(x, y, z) \in [0, p) \times [0, q) \times [0, r)$的正整数组具有一一映射。因此，我们只需要构造序列$A', B', C'$满足对于任意的$0 \leq x < p$, $0 \leq y < q$, $0 \leq z < r$，有$A'_{(x,y)} \oplus B'_{(x,z)} \oplus C'_{(y,z)} = 0$，我们即可反向构造出$A, B, C$。
- 这启发我们构造P, Q, R，使得

$$A'_{(x,y)} = P_x \oplus Q_y, B'_{(x,z)} = P_x \oplus R_z, C'_{(y,z)} = Q_y \oplus R_z.$$

Bonus：请对满足条件的(A, B, C)对进行计数，$pA, pB, pC \leq 10^9$。（提示：满足条件的构造均具有上述"笛卡尔积"的结构）

E. 排列路由

题目描述

给定一棵树，每个节点上初始有一个数字p_i，p构成了一个排列。每次操作可以选择树的一个匹配，对于匹配中的每一条边，交换边的两个端点上的数字。使用不超过$3n$次操作，使得每个节点上的数字等于节点编号。

数据范围：$1 \leq n \leq 1000$;
出题人：Hongyi Chen (chychy)

E. 排列路由

解法

- 考虑点分治，存在点r使得删去r后所有子树的大小都不超过$n/2$。
- 设删去r后的子树为$T_1, T_2, \cdots, T_k$，记$bel(u)$为编号为u的节点所处的子树（特别的，$bel(r) = \perp$）。
- 如果$bel(u) = bel(p_u)$，称u是一个“好点”，否则是一个“坏点”。第一步的目标是让所有的点都变成“好点”。
  - 阶段(1)：对于每棵子树，将所有的坏点移动到好点上方。每一轮中，如果当前节点是坏点，父亲是好点，那么贪心交换即可。
  - 阶段(2)：每次选择一个坏点移动到根，再从根移动到对应子树。这样会使得一个坏点变为好点，破坏(1)的性质，但是可以并行化进行(1)中的调整。
  - 总共需要花费1.5n次操作（证明见下一页）。
- 将所有的点变成好点后，可以对所有子树并行化地递归处理，需要花费$T(n/2)$步。
- 操作次数为$T(n) \le T(n/2) + 1.5n \le 3n$。

E. 排列路由

解法

- $1.5n$次操作的证明:
  - 记$g(T_i), b(T_i)$分别为子树T_i中的好点，坏点个数
  - 对于所有子树，至多经过$\max g(T_i)$轮之后，可以进入阶段(2)
  - 在根位置的交换，最多需要花费$1.5 \times \sum b(T_i)$ 次操作（考虑一个n个点的star，每三次操作可以交换两个叶子上的值）。
  - 总共需要花费$(\max g(T_i) + 1.5 \times \sum b(T_i)) \leq 1.5n$次操作。
- 精细实现和分析可以将总操作次数降低到$2n$。
- 验题人提出的做法：每一轮求出一组匹配，最小化交换之后的$\sum dis(i, p_i)^2$。也可以在$2n$次操作之内完成目标。

J. 力争和谐

题目描述

有$2n$个人，你需要组织k轮比赛，每轮比赛将$2n$个人分成n对，每对进行比赛。初始时所有人积分为0，每次比赛，积分高的人会输给积分低的人，赢家会+1分，输家会-1分。

你需要安排每轮比赛的配对方式，满足在k轮比赛过程中，每个人的积分的绝对值都不超过3。求所有安排比赛的方案数。

数据范围：$1 \le n \le 400, 1 \le k \le 20$;

出题人：Hongyang Liu (gisp_zjz)

J. 力争和谐

观察

- 在奇数轮后，所有人积分都$\in \{-3,-1,+1,+3\}$；在偶数轮后，所有人积分都$\in \{-2,0,+2\}$。
- 对于奇数轮，确定得分分别为-3,+3的人数分别为j,k后，得分-1,+1的人数也可以随之确定，所以可能的状态数为$O(n^2)$。
- 对于偶数轮，得分-2,+2的人数相等，可能的状态数为$O(n)$。

题解

- 将所有可能的状态编码，令$dp_{i,j}$表示i轮后到状态j的方案数，则i为奇数时有$O(n^2)$种状态，i为偶数时有$O(n)$种状态。
- 如果能预处理所有$O(n^3)$种转移的系数，即可在$O(1)$转移。
- 复杂度：$O(kn^3)$。

J. 力争和谐

题解

- 我们用$(i)_{\text{even}}$表示偶数轮，有i个人得分为-2的状态；用$(j,k)_{\text{odd}}$表示奇数轮，分别有j,k个人得分为-3,+3的状态；
- 对于偶数行到奇数行的转移：$(i)_{\text{even}} \to (j,k)_{\text{odd}}$。
- -3分必须由两个-2分的人配对得到，3分同理。先在i个-2分的人选出$2j$个配对，i个+2分的人选出$2k$个配对，方案数可以通过预处理组合数得到。
- 剩下的问题变成有$2(n-i)$个0分，$i-2j$个-2分，$i-2k$个+2分的人配对，要求-2分的人不能和-2分的配对，+2分的人不能和+2分的配对。
- 令$f_{a,b,c}$表示当前有a个0分，b个-2分，c个+2分进行上述配对的方案数，可以先dp预处理f：

$$f_{a,b,c} = (a-1)f_{a-1,b,c} + bf_{a,b-1,c} + cf_{a,b,c-1}.$$

J. 力争和谐

题解

- 我们用$(i)_{\text{even}}$表示偶数轮，有i个人得分为-2的状态；用$(j,k)_{\text{odd}}$表示奇数轮，分别有j,k个人得分为-3,+3的状态；
- 对于奇数行到偶数行的转移：$(j,k)_{\text{odd}} \to (i)_{\text{even}}$。
- 可以看成$i-j$个-1分的人通过和-1或-3分的人匹配得到-2分，$i-k$个+1分的人通过和+1或+3分的人匹配得到+2分。
- 剩下的匹配一定是分数<0的人和分数>0的人匹配，方案数可以通过预处理阶乘得到。
- 令$g_{a,b,c}$表示有a个-1/+1分，b个-3/+3分，内部进行了c次匹配的方案数，同样可以先dp预处理g:

$$g_{i,j,k} = g_{i-1,j,k} + (i-1)g_{i-2,j,k-1} + jg_{i-1,j,k-1}$$

D. 猜数游戏

题目描述

给定Q对正整数$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_Q, b_Q)$，你需要对所有前缀回答如下问题：

- 给定n对正整数对$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$，裁判秘密指定某个正整数$1 \le i \le n$，将$a_i$与$b_i$分别交给Alice和Bobo。Alice和Bobo轮流猜对方的数字，或者宣称自己并不知道对面的数字。假设双方都很聪明且诚实的情形下，问有多少个i使得Alice先猜中对方的数字；有多少个i使得Bobo先猜中对方的数字。

数据范围：$Q \le 10^6$，$a_i, b_i \le 10^5$；

出题人：Xinyuan Zhang (triple__a)

D. 猜数游戏

解答

- 首先考虑静态版本。
  - 令A, B分别代表Alice/Bobo先猜中对方的i的个数。
  - 构建二部图$G=(L,R,E)$，其中$(L_{a_i}, R_{b_i}) \in E$;
  - 删除左半边度数为1的节点，$A \leftarrow A+S$，其中S为这一回合删除的节点个数；而后删除右半边度数为1的节点，$B \leftarrow B+T$，其中T为这一回合删除的节点个数;
  - 重复删除节点的过程，直至图中不存在度数为1的节点。
- 对二部图的每一个联通分支，我们考虑经过静态版本删点过程后对A与B的贡献如何进行计算：
  - 若该联通分支为一棵树，则该联通分支经过上述静态版本删点过程后仅剩一个节点，而该节点所属半边取决于这颗树的直径长度以及端点所在半边；
  - 若该联通分支存在环，我们将所有在环上的边删除，环上的顶点标记为不可选定点；经过此操作后，联通分支将变为有根树森林，其中根为不可选定点。这个联通分支在静态版本删点过程中对A, B的贡献取决于有根树森林中非根节点在左右半边的节点个数。

D. 猜数游戏

解答

- 因此，我们考虑利用并查集维护一个连通分支的状态：
  1. 如果该联通分支是一棵树，维护直径与直径长度；
  2. 如果该联通分支并非一棵树，我们维护上述提到的有根树森林。
- 加边的过程需要根据两个顶点是否在同一个连通分支、连通分支的状态进行一定的讨论。我们这里仅仅指出两个联通分支均为树时，合并操作可以使用直径技巧：即最终树的直径一定可以通过原来两棵树直径的四个顶点中取两个顶点得到。
- 通过离线构建生成树预处理距离oracle，我们在$O(M \log M + Q)$的时间复杂度内解决问题，其中$M = \max(\max a_i, \max b_i)$。

I. 最好的朋友，最坏的敌人

题目描述

平面上有n个不同的点，对所有$1 \le m \le n$，求只考虑前m个点时有多少二元组$(a, b)(a \neq b)$使得b同时是到a曼哈顿距离最大的点和到a切比雪夫距离最小的点(不计a本身、可以并列最大或最小)。

数据范围：$n \le 4 \times 10^6$，$x_i, y_i \le 10^7$;
出题人：Tianxing Ding (skyline)

I. 最好的朋友，最坏的敌人

解法1

- 我们先考虑静态的情况。考虑当所有点对的最大曼哈顿距离是L，每个点和与其曼哈顿距离最远的点之间的曼哈顿距离不小于$\frac{L}{2}$，于是与其曼哈顿距离最远的点和它的切比雪夫距离不小于$\frac{L}{4}$。
- 如果我们把平面划分成边长为$\frac{L}{4}$的正方形，每个正方形内有多个点的时候其中每个点都不可能成为二元组中的a。
- 所有点都在一个边长为$\frac{L}{2}$的斜着的正方形内，所有点出现在$O(1)$个不同的边长为$\frac{L}{4}$的正方形内。
- 现在我们考虑动态的情况，只在所有点对的最大曼哈顿距离翻倍的时候重构否则沿用原来的L。
- 每个阶段还是只会产生$O(1)$个a的候选点，而只有$O(\log(max(x,y)))$个阶段。
- 时间复杂度$O(n\log(max(x,y)))$。

I. 最好的朋友，最坏的敌人

解法2

- 我们维护所有不能排除现在或未来是a的可能的点，即当前最远曼哈顿距离不超过最近切比雪夫距离两倍的点。
- 在考虑到第i个点的时候，我们可以简单算出最远曼哈顿距离，然后按序号从大到小的顺序用之前的点更新最近切比雪夫距离，一旦发现第i个点不满足要求就停止。
- 由做法1中提到的性质，每个阶段每个格子的上述检查次数和是$O(n)$的，而不能排除现在或未来是a的可能的点的数量时时刻刻是$O(1)$的。
- 时间复杂度$O(n\log(max(x,y)))$。

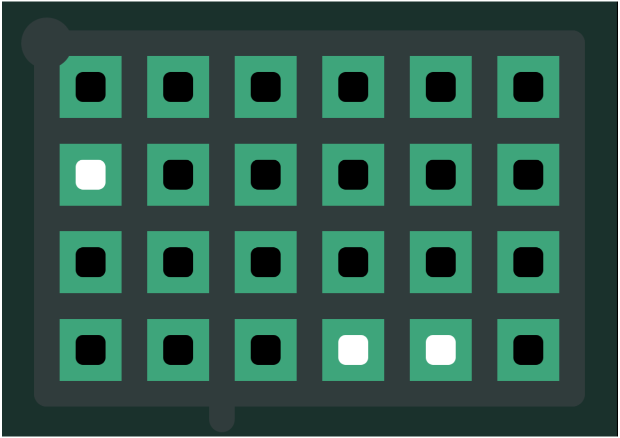
H. 见证者

题目描述

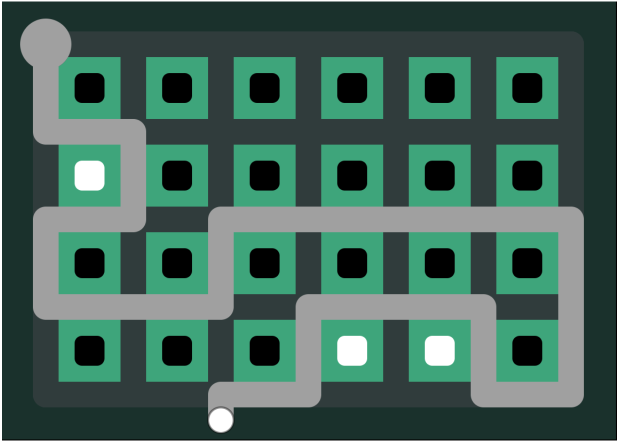
给定一个《见证者》游戏中的黑白格谜题，保证每个格子要么是黑格要么是白格，要求构造出一种合法方案或者判断无解。棋盘大小$n \times m$。

数据范围：$1 \le n, m \le 40$;
出题人：Chunyang Wang (Roundgod)

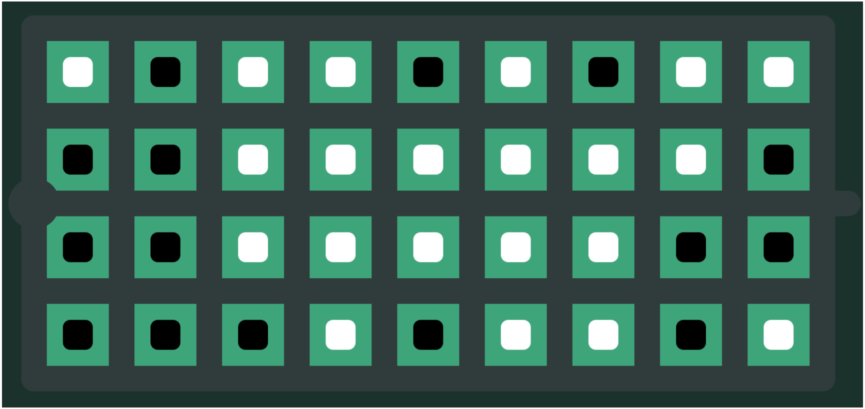
H. 见证者



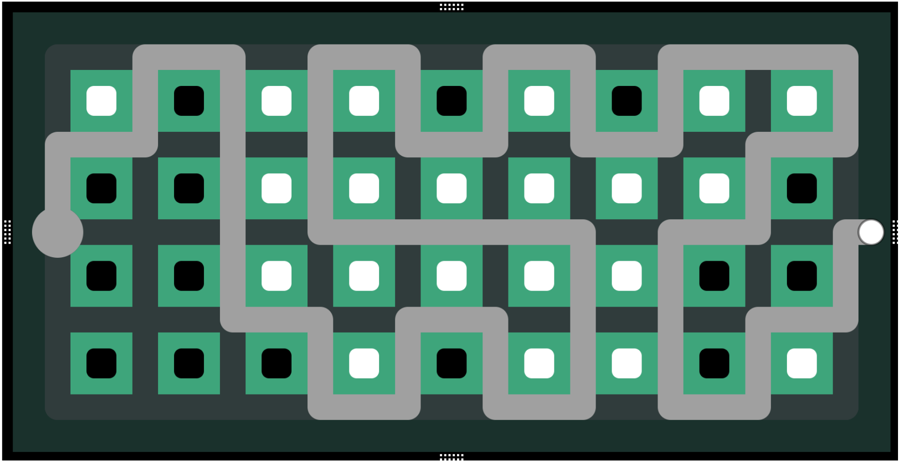
H. 见证者



H. 见证者

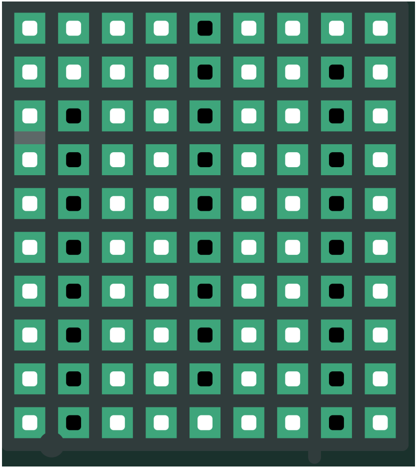


H. 见证者

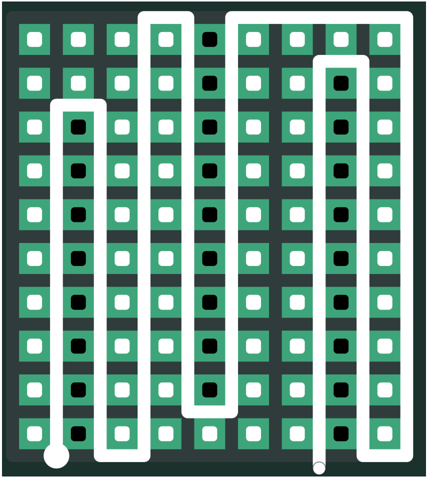


唯一解

H. 见证者



H. 见证者

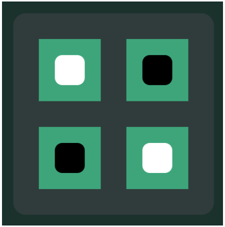


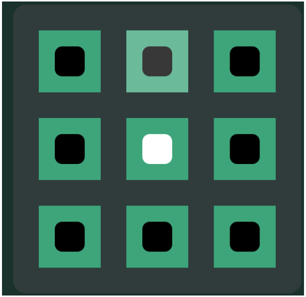
答案可能会要求多次横跨地图

H. 见证者

一些简单情形

- 可以注意到，要求所有被划分出来的区域内同色等价于路径必须分割所有相邻异色方格。
- 因此，以下情况都无解(出现一个点度数为4或是出现环)。唯一的情况是这些必须经过的边构成一些从边界到边界的不相交路径。



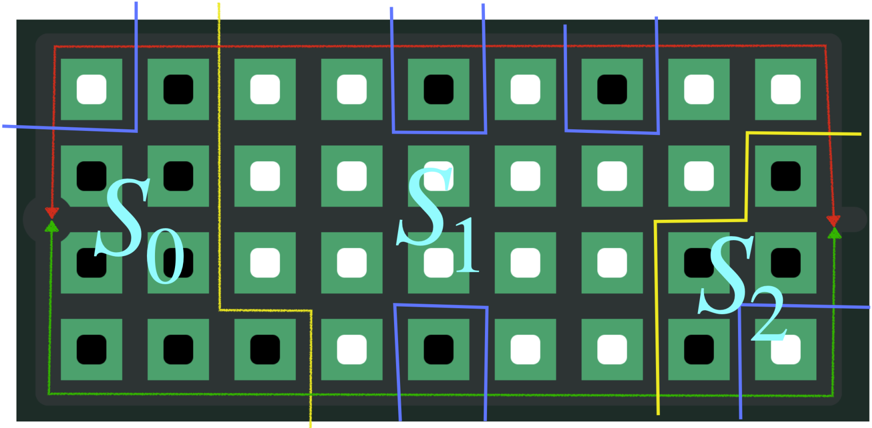


H. 见证者

A类路径和B类路径

- 注意到起点和终点把地图的边界分成两部分,我们姑且把它称作上面和下面。
- 我们也把这些必须经过的不相交路径分成两类:A类路径和B类路径。其中A类路径指起点和终点在同一部分的，B类路径指起点和终点在不同部分的。
- 我们把经过起点/终点的路径当作A类路径。
- 可以注意到,B类路径把整个地图划分成了一些顺序的区域$S_0, S_1, \ldots, S_\ell$,其中起点在S_0,终点在S_ℓ。

H. 见证者



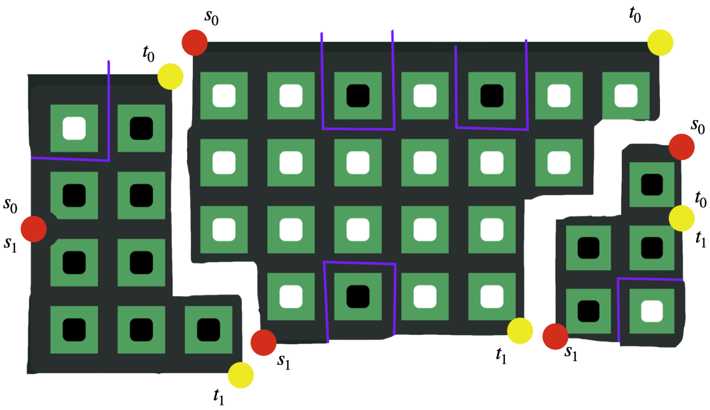
如图所示，红色为上面，绿色为下面，蓝色路径为A类路径，黄色路径为B类路径。地图被顺序划分成三个区域S_0, S_1, S_2。

H. 见证者

一些额外的观察

- 容易知道，当到达某个路径的端点之后，由于不能重复经过同一个点，接下来必须沿着这条路径走。
- 因此解的访问区域顺序一定是$S_0 \to S_1 \to \cdots \to S_\ell$。每个区域的出发点有至多两个(前一条B类路径的两个端点，如果在S_0则是起点)，到下一个区域的目标点也有至多两个(后一条B类路径的两个端点，如果下一个区域是S_ℓ则是终点)。
- 至此，我们只需要解决每个区域内的问题：对每个可能的出发点和目标点，能否找到区域内的简单路径使得区域内所有A类路径都被经过?

H. 见证者



我们只需判断每个区域内能否通过简单路径从s_i $(i = 0, 1)$ 到达t_i $(i = 0, 1)$, 使得区域内所有A类路径都被经过。

H. 见证者

重要性质

- 我们固定某个区域，对于边界上任意的两个点a, b，考虑所有从a到b的经过所有端点在顺时针/逆时针区间$[a, b)$之间的A类路径的路径，一定存在一条唯一的路径使得“剩下”的区域(指顺时针/逆时针区间$[b, a)$所在的区域)严格包含所有其他的路径“剩下”的区域。
- 严格证明比较复杂，这里略去。大体的思想是如果有两条合法的路径P和Q，一定能构造出一条路径$R = R(P, Q)$使得R的“剩下”的区域严格包含P和Q剩下的区域。

H. 见证者

区间DP

- 因此，我们可以进行如下的区间DP，DP储存的值是最优的路径:
  - $f(i,j)$:经过了上面i格，下面j格中内部所有A类路径，且当前在上面第i格的最优路径
  - $g(i,j)$:经过了上面i格，下面j格中内部所有A类路径，且当前在下面第j格的最优路径。
- DP的转移考虑枚举上一步从何而来，我们这里只说$f(i,j)$的计算，$g(i,j)$的计算是对称的:
  - 如果上面第i格是一个A类路径的右端点P且其左端点是k，可从$f(k,j)+P$转移;否则如果$i>0$可从$f(i-1,j)+(i-1,i)$转移。
  - 如果$j\geq 1$且下面第j格不是A类路径的右端点，可从$g(i,j-1)$转移。
  - 枚举所有的$k\leq j$使得$[k+1,j]$内不包含任何A类路径的端点，考虑从下面第k格走过来，需要通过一个左手定则/右手定则的DFS来构建出一个剩下区域的路径。

H. 见证者

结局

- 假设n, m同阶。DP状态数为$O(n^2)$, DP的转移需要枚举另一侧的起点($O(n)$) 以及DFS/比较两个路径($O(n^2)$), 总的时间复杂度为$O(n^5)$ (每个区域内的DP可以均摊)。
- 事实上，DP的转移可以不用枚举另一侧的起点而是直接从另一侧最后一个A类路径的右端点进行DFS即可。这样时间复杂度可以到$O(n^4)$，但这个优化不是必须的。
- 本题的做法参考了FUN 2018的paper:

  Who witnesses The Witness?—

  Finding witnesses in The Witness is hard and sometimes impossible
- 论文的arXiv链接为`https://arxiv.org/pdf/1804.10193`。
- 以及The Witness真的是一个很棒的游戏!推荐大家有空去玩。