



The 3rd Universal Cup

Stage 34: Aobayama (青葉山)
解説



結果

優勝: **AMATSUKAZE** さん (1000点, 313:19)

オンサイト優勝: **Rolling Akabeko** さん (510点295:10)

おめでとうございます！！！！



各問題のFA

問題	全体FA	オンサイトFA
A	nekonekonekone(247:07)	-
B	ucup-yosupo(229:48)	-
C	AMATSUKAZE(88:45)	-
D	ucup-yosupo(120:45)	-
E	ucup-yosupo(49:53)	thunderbird(156:02)
F	-	-
G	-	-
H	Haa(20:20)	-
I	-	-
J	-	-
K	-	-
L	ucup-yosupo(72:34)	thunderbird(74:02)
M	海外ニキ(55:12)	Rolling Akabeko(61:57)
N	AMATSUKAZE(64:36)	nonour(134:49)
O	aPNJ777(83:03)	-
P	AMATSUKAZE(2:59)	喜多方ラーメン(3:58)
Q	Rolling Akabeko(3:33)	Rolling Akabeko(7:55)
R	anmichi(7:57)	Rolling Akabeko(52:01)

問題の難易度



予想: writer / tester 陣の予想 difficulty の平均

実際: atcoder-standing-difficulty-analyzer

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
予想	2950	3275	2675	1971	1825	2440	2333	1650	2500	2675	3200	1950	2200	2750	2243	588	800	1100
実際	2888	2888	2710	2710	1884	-	-	2188	-	-	-	2021	2118	2599	2445	682	847	1190



P - Adjacent Reset

原案 : milkcoffee

writer : karinohito

tester : sotanishy, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 長さ N の整数列 (A_1, A_2, \dots, A_N) が与えられる
- コスト $\max(A_i, A_{i+1})$ で A_i, A_{i+1} を 0 に出来る
- 全て 0 にするためのコストの最小値は？



解法

- 各要素について, それが 0 になるタイミングを考えると列が長さが 1 or 2 の連続部分列に分けられる
- このとき区間のコストは区間内の A の max
- 長さが 1 か 2 かを遷移に持つ DP をすれば良い



Q - Make Intervals Disjoint

原案 : Dispersion

writer : karinohito

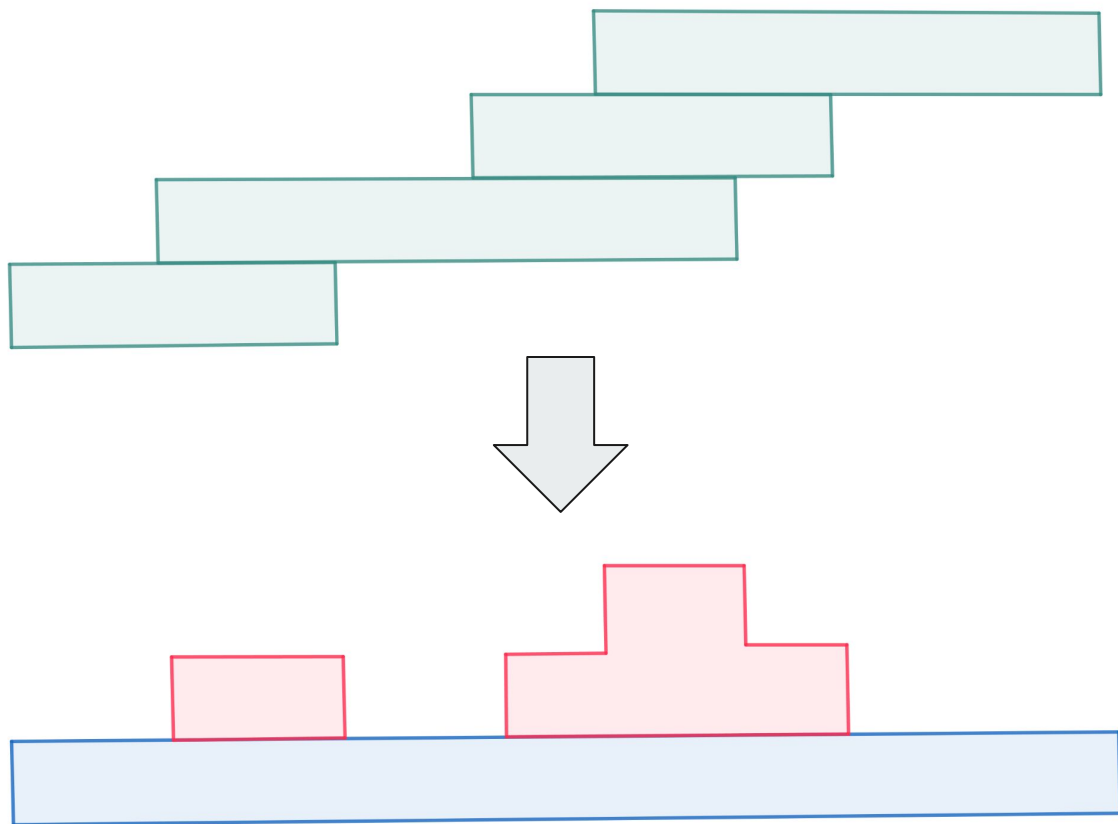
tester : toam, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- N 個の区間 $[L_i, R_i)$ が与えられる
- コストを 1 支払うことで、 L_i (or R_i) を $+1$ (or -1) 変化させられる
- 区間を非交差にするために必要な最小コストは？

解法





解法

- 赤で示した量 (= 複数の区間が重なる分) は削らなければならない
- 実はこの下界が達成可能



R - Bracket Game

writer : toam

tester : karinohito, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- ‘(,’,’?’ からなる文字列 S が与えられる
- S の ‘?’ を一つ選んで ‘(’ または ‘)’ に置き換えるという操作をあおばさんとひろせさんが交互に行う
- 操作終了後, S が正しい括弧列なら先手の勝ち, そうでなければ後手の勝ち
- どっちが勝つか判定



解法

- 先手は最左の '?' を '(' に置き換えるor 最右の '?' を ')' に置き換えるのが良い
- 後手はその逆
- '?' の個数で場合分け
- 0 個なら勝敗は決まっている
- 偶数のときは後手必勝
 - 最後の手番で後手が正しい括弧列にならないようにできる
- 奇数のとき
 - S の '(' の個数を ')' の個数が 3 以上だったら後手必勝
 - もともと '?' だった文字を取り出すと "()()()()..." or ")()()()(..." になっている
 - それが正しい括弧列なら先手の勝ち



E - 010-11 Shorten

writer : milkcoffee

tester : toam, potato167, kotatsugame



問題概要

- 01 からなる文字列Sが与えられる。以下の操作が行える。
 - 操作1: 010 → 1 に置き換える。
 - 操作2: 11 → 1 に置き換える。
- 操作は最大で何回行えるか？



解法

- 文字列Sを1で区切って0が何個あるかの数列Aを考える。
 - (例) $S=0010110001 \rightarrow A = (2,1,0,3,0)$
- 操作は「0の削除」or「連続する2つの正整数を1減らす」となる。
- Aの最大値が過半数でなければほとんど0にできる。



L - Square Connection

writer : n_o_n_o_n

tester : karinohito, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 正整数 s, t が与えられる
- s を $s+u$ が平方数となる正整数 u に置き換えるという操作ができる
- s を t に一致させるための操作回数の最小値, およびその手順を求めよ



解法

- 任意の s, t について 3 回以下の操作で可能
- 実際 $u^2 - s - t - 1$ が偶数となる u を十分大きくとると
 - $s \rightarrow u^2 - s \rightarrow ((u^2 - s - t - 1)/2)^2 - t$
- と操作できる



解法

- あとは 2 回以下での操作を考えれば良い
- 1 回は容易なので 2 回を考える
- $d = |s - t|$ とおく
- このとき以下のいずれかが成り立つときに 2 回で可能
 - d が奇数かつ $((d+1)/2)^2 > \max(s, t)$
 - d が 4 の倍数かつ $((d+4)/4)^2 > \max(s, t)$
- 具体的な構築や証明は AtCoder 上の解説参照



M - Divide Digit String

writer : toam

tester : sotatnishy, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 長さ N の数字列 S が与えられる
- S を M 個の数字列に分割してそれらを整数としてみなしたとき, 大きい方から K 番目のものを最小化せよ



解法

- 桁数について考える
 - $K = 1$ のとき: $\text{floor}(N/M)$ 桁
 - $K \geq 2$ のとき: 1 桁 ($M-1$ 個を 1 桁にできる)
- $K = 1$ のとき
 - 答えの候補は $O(N)$ 個. Suffix Array で答えの候補をソート \rightarrow 二分探索
- $K \geq 2$ のとき
 - 答えは $1, 2, \dots, 9$ のいずれか. それぞれ達成可能かをチェックする



H - 12 Grid

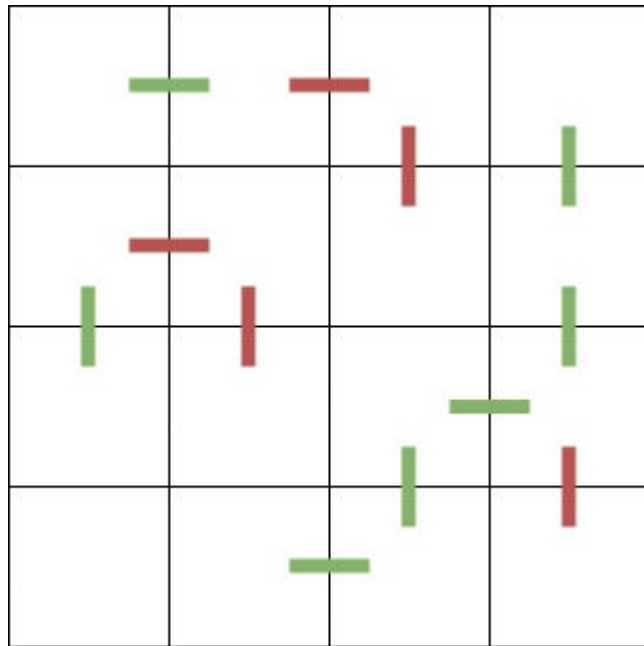
writer : sotanishy

tester : toam, potato167, tatyam, kotatsugame

問題概要

$N \times N$ のマス目に数字を書き込む

- 隣り合うマスの差は **1** か **2**
- 何箇所かは **1** か **2** のどちらかが指定される



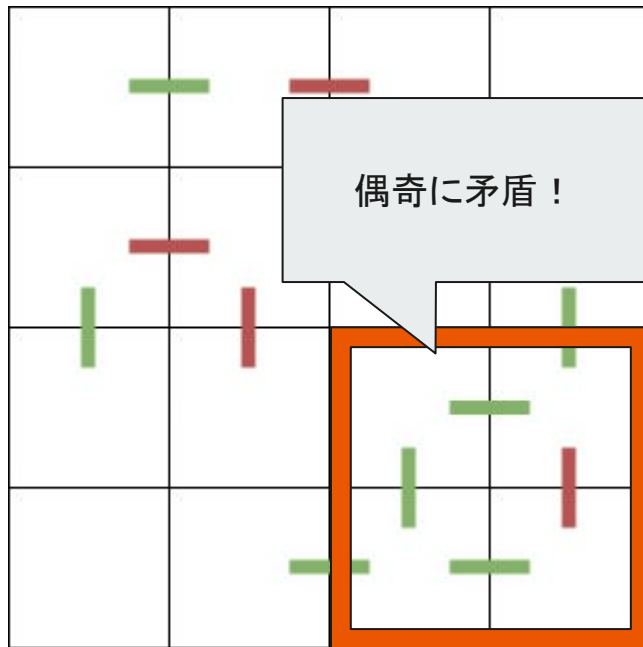
解法 – 可能かどうかの判定

偶奇に矛盾が起きたら不可能

二部グラフ判定の要領で判定可能

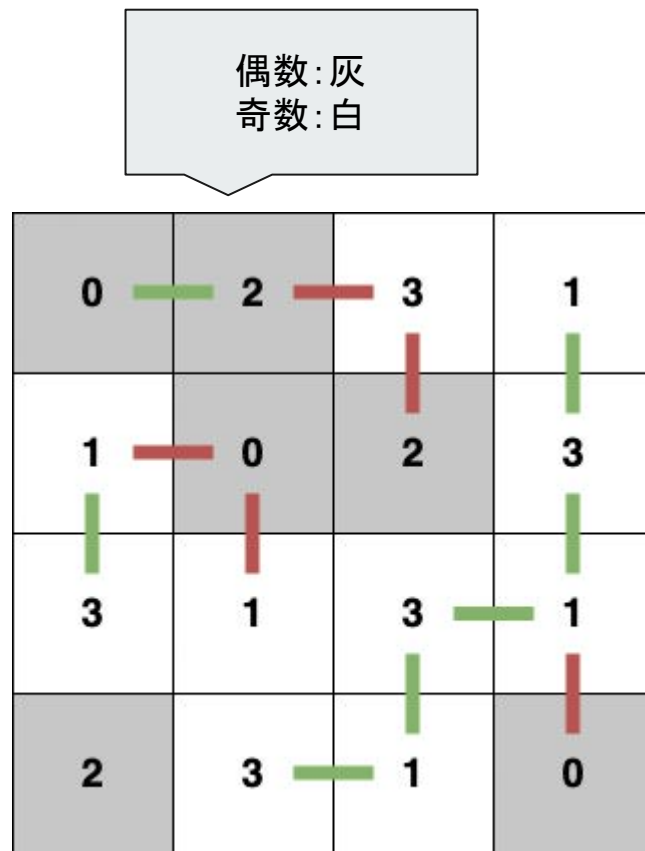
偶奇に矛盾がなかったら常に可能

実は0, 1, 2, 3の4値だけで条件を満たせる



解法 - 可能な場合の構築

1. 偶奇を矛盾がないように決める
2. 偶数を書き込む場合,
 - $i+j$ が偶数なら 0
 - $i+j$ が奇数なら 2
3. 奇数を書き込む場合,
 - $i+j$ が偶数なら 3
 - $i+j$ が奇数なら 1



解法 – 可能な場合の構築

なぜうまく行くか？

- 同じ数字と, 0と3は隣り合わない
(隣接マスの $i+j$ の偶奇は異なる)
→ 隣り合うマスの差は1か2
- 偶奇に矛盾はない
→ 指定された条件を満たす

0	2	3	1
1	0	2	3
3	1	3	1
2	3	1	0



O - Twin Contests

writer : karinohito

tester : toam, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 各 n について、 n と P_n の積が最小となる順列の数え上げ。



解法(部分点)

- $\min(nP_n) \leq 1 \times P_1 \leq N$
- 優勝者と順位を固定する ($O(N \log N)$ 通り)
- 残り的人それぞれについて取っても良い順位の集合が決まる。
- 番号の小さい人ほど厳しい条件(小さい集合)になっているので、番号の昇順に順位として取りうる個数を掛けていく。



解法(満点)

- 優勝者と順位の積を固定する ($O(N)$ 通り)
- さらに優勝者を固定すると部分点同様に残りの部分を積で表せる
 - 積の形は固定するものを一歩変えてもよく似ている
 - 必要な場所だけ更新すると毎回変化させなくて良い
- 変更は全体で $O(N \log N)$ 回で済む。



N - Palindromic Path

writer : sotanishy

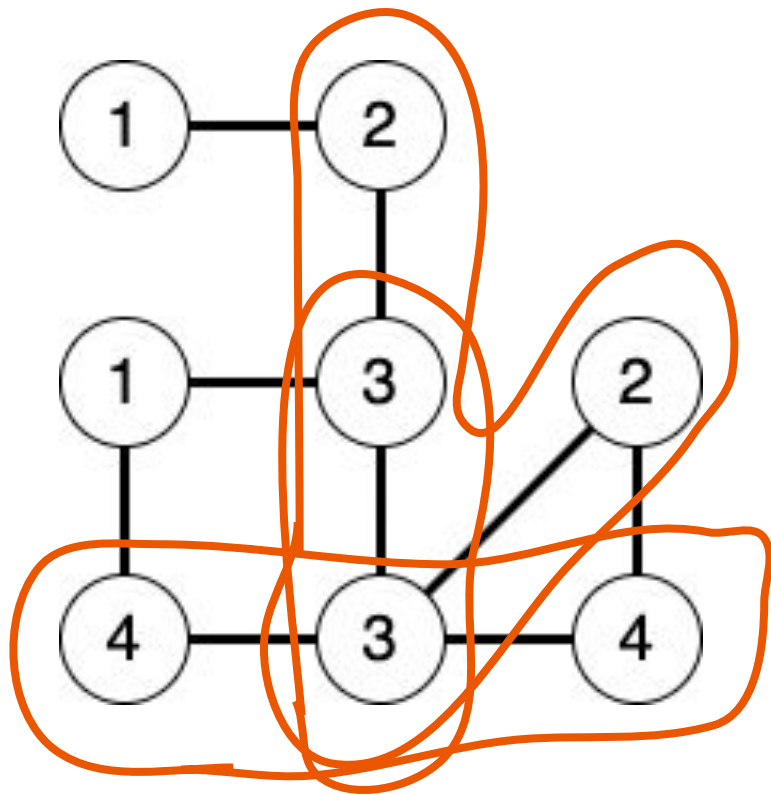
tester : toam, potato167, tatyam, kotatsugame

問題概要

$2N$ 頂点のグラフ G で, 整数 $1, 2, \dots, N$ がちょうど2つの頂点に書き込まれている

各頂点から始まる

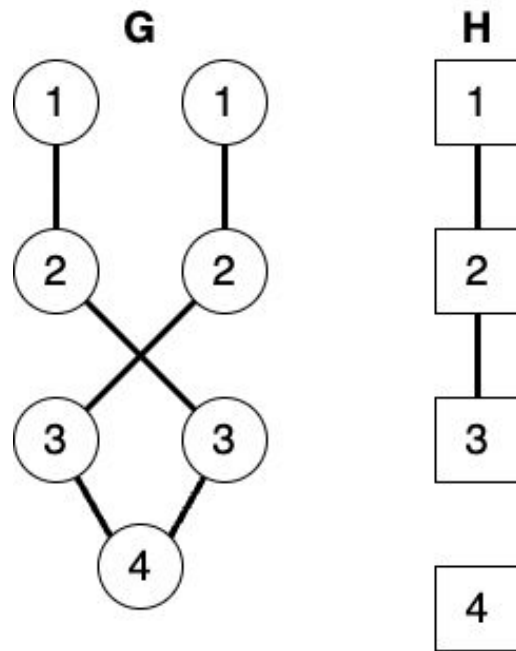
長さ2以上の**回文パス**が存在するか判定



解法

N 頂点のグラフ H を次のようにしてつくる

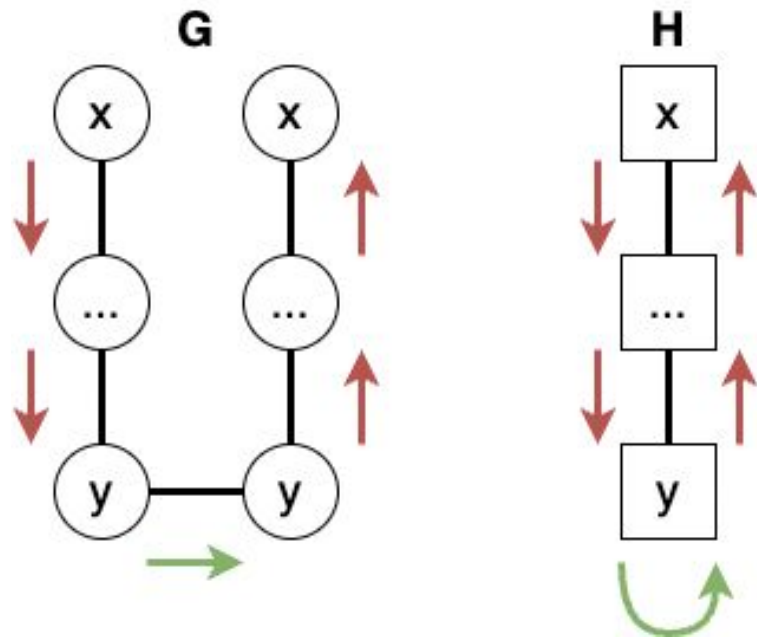
- G で x, y の間に頂点を共有しない辺が 2 つあるなら, H の x, y を結ぶ



解法 - 偶数長の回文パス

「 $x \rightarrow \dots \rightarrow y \rightarrow y \rightarrow \dots \rightarrow x$ 」の存在条件:

1. Hでxからyへのパスが存在する
2. Gで $y \rightarrow y$ 辺が存在する



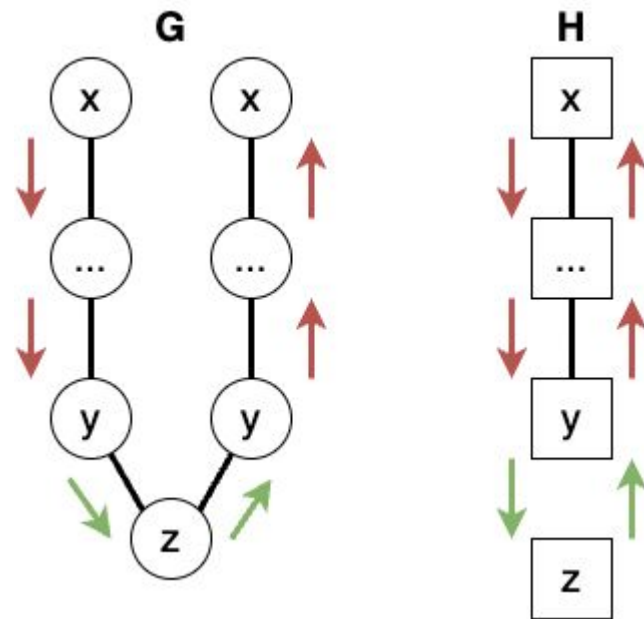
$y \rightarrow y$ 辺が存在するような y と,

Hで同じ連結成分に属する x はすべて始点となりうる

解法 - 奇数長の回文パス

「 $x \rightarrow \dots \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow \dots \rightarrow x$ 」の存在条件:

1. Hでxからyへのパスであって
zを通らないものが存在する
2. Gで $y \rightarrow z \rightarrow y$ 辺が存在する



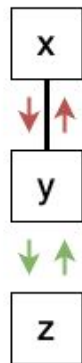
Hにおいて、zを削除したとき、xからyへのパスが存在するか？

解法 - 奇数長の回文パス

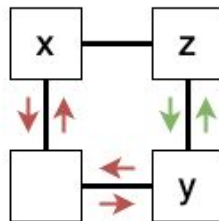
Hにおいて, zを削除したとき,
xからyへのパスが存在するか?

1. x, yとzが異なる連結成分
→ Yes
2. zが関節点でない
→ $x \neq z$ なら Yes, $x = z$ なら No
3. それ以外
→ Hの block cut tree 上での x, y, z の位置関係を見れば良い

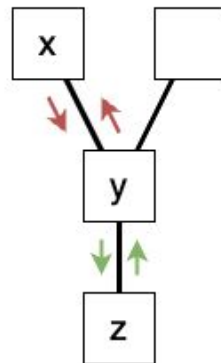
(1) Yes



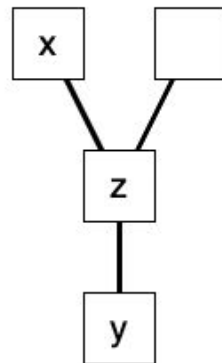
(2) Yes



(3) Yes



(3) No





C - 2-Power Rush

writer : horitaka(原案), toam(改題)

tester : karinohito, potato167, kotatsugame



問題概要

- 要素がすべて 2 べきであるような多重集合を良い集合と呼ぶ
- 総和が N であるような良い集合 S すべてに対する, $\prod S$ の総和を求めよ

(制約)

- $T \leq 1e7$
- $N < 2^{30}$

解法

- 部分点 ($N \leq 10^6$): dp で簡単に答えが求まる

```
dp = [0] * T
dp[0] = 1
for i in range(20):
    p = 1 << i
    for j in range(T - p):
        dp[j + p] = (dp[j + p] + dp[j] * p) % mod
```

- 部分点 ($T \leq 10^3$)
 - 多項式補間
 - 貯金箱の焦り (yukicoder No.137) と似たような方法でも ok
- 満点: いい性質を見つけて, 頑張って dp する



D - Swap Counter

writer : n_o_n_o_n

tester : ripity, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- バブルソートの各点での swap 回数の結果が与えられる
- そのような結果を得られる順列のうち辞書順最小のものを求めよ



解法

- 操作を言い換える
 - $i=N, N-1, \dots, 1$ の順に以下を行う
 - 操作の直前で $P[j]=i$ であるとき, $k=j, j+1, \dots, N-1$ の順に $P[j]$ と $P[j+1]$ を swap
- このときの各点での swap 回数は $B[i]+i$ となる (これを A とする)



解法

- このとき $f(P)=B$ なる P が存在する必要十分条件は
 - A が広義単調増加
 - $A[i] \leq A[i+1]$ ($i=1, \dots, N-1$)
- あとはこの A の差分を元に P を構築すれば良い
- 辞書順最小化は貪欲にできる



余談

- この問題は8月に会津大学に会場の下見に行く途中の電車の中で生まれた問題



A - Inversions of PQ and QP

writer : karinohito

tester : n_o_n_o_n, potato167, tatyam, kotatsugame



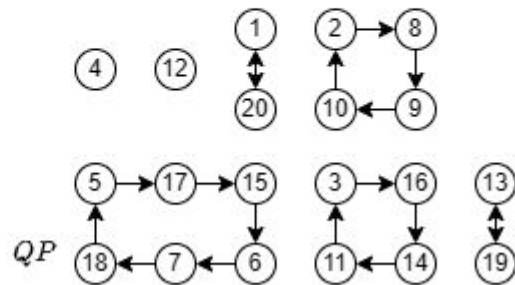
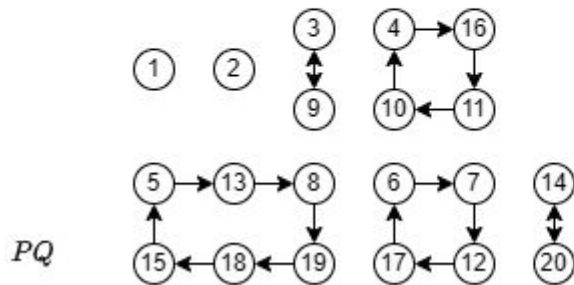
問題概要

- 順列 P, Q について、 $P \rightarrow Q$ の順に合成したものと $Q \rightarrow P$ の順に合成したものの転倒数はそれぞれどうなるだろうか？
- 転倒数側(と列のサイズ)が与えられるので順列を作ろう

解法

- 適当なPQとQPをグラフにして観察すると.....?

$P = (4, 9, 2, 15, 12, 1, 18, 14, 11, 13, 6, 7, 16, 8, 5, 19, 20, 10, 3, 17),$
 $Q = (17, 18, 3, 19, 9, 13, 12, 2, 20, 15, 10, 6, 1, 11, 14, 8, 4, 7, 16, 5)$





解法

- PQとQPをグラフにするとサイクル分解した時の形が同じ.....?
 - この観察は正しい
 - さらに逆(形が同じならP,Qが作れる)も言える
 - サイクルの分解を決め打ってからP,Qを作ろう
- 実はサイクルの分解も適切な $O(N)$ 通りを試せばOK
 - 例えばサイズ6のサイクル1つよりサイズ2のサイクル3つの方が作れる転倒数の集合が真に大きいといった議論
- 後は頑張る



B - Matching Query

writer : toam

tester : sotanishy, potato167, kotatsugame



問題概要

- 数列 A をもとにグラフ G を作る.
 - 頂点 $u, v (u < v)$ に辺が張られる条件: $A[u] + 1 \equiv A[v] \pmod{M}$
- G の最大マッチングのサイズを求める
- A の一点更新が Q 個与えられる. 各更新後のマッチングサイズを求める

(制約)

- $N, M, Q \leq 3e5$

部分点解法

- 考察を進めると次の整数計画問題に帰着できる

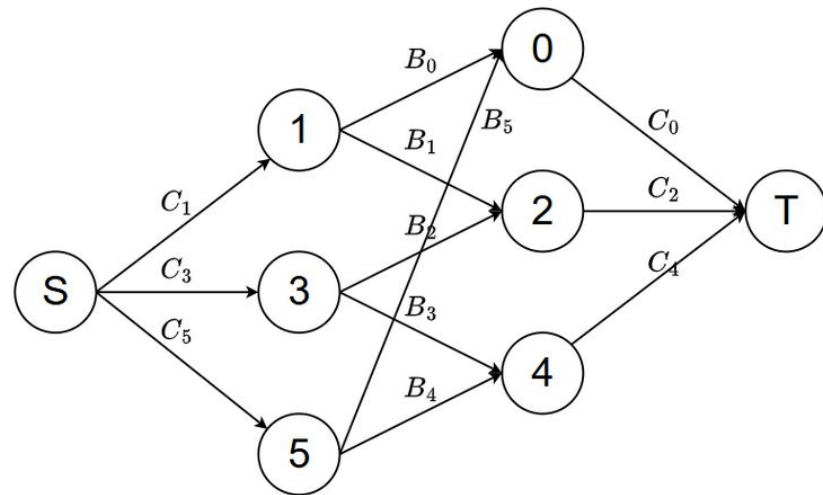
$$\text{maximize } \sum_{i=0}^{M-1} x_i \text{ subject to } 0 \leq x_i \leq B_i \wedge x_{i-1} + x_i \leq C_i$$

この問題は $O(M)$ で解ける.

- $(Q = 1)$ B, C を線形時間で求める
- $(M \leq 100)$ B, C の更新を $O(\log N)$ で行う(セグ木でできる)

満点解法

- 整数計画問題を $O(\log M)$ で解く
- M が偶数のとき整数計画問題は右のグラフの最大流になる
- これはセグ木に乗る (!!)
- M が奇数のときはそのままでは最大流で表現できないので工夫が必要





F - Another Long Sequence Inversion

writer : n_o_n_o_n

tester : toam, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 数列 $(L \text{ xor } X, (L+1) \text{ xor } X, \dots, R \text{ xor } X)$ の転倒数はいくつ？
- 入力と出力はともに二進数



解法

- 区間の全ての要素に xor を作用させたものもセグ木の要領で $O(\log(R-L))$ 個の区間になる
- あとは区間同士の転倒数と区間内の転倒数をそれぞれ求めれば良い
- 丁寧に整理すると分割統治+畳み込みになる



G - Convex Hull of Intersections

writer : Dispersion

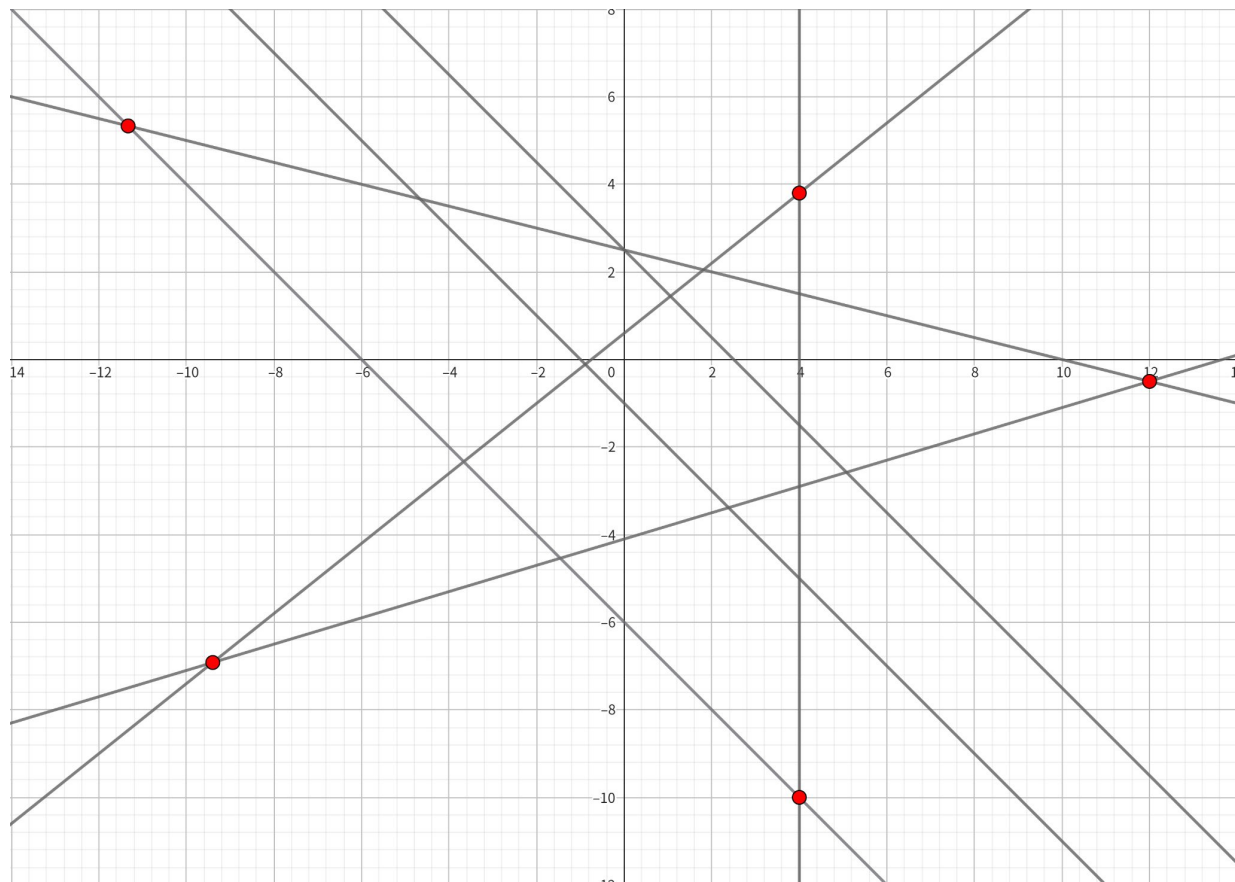
tester : karinohito, toam, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 2次元平面上の直線が N 本与えられる
- これらの直線の交点全体を P とする。 P の凸包の面積は？

観察





解法

- 凸包の頂点になり得るのは、隣り合う傾きの交点のみ
- 平行な直線がある場合、端にあたる2本だけ見ればいい



- 凸包の頂点候補は高々 $4N$ 点になる



I - Small Steps

writer : ripity

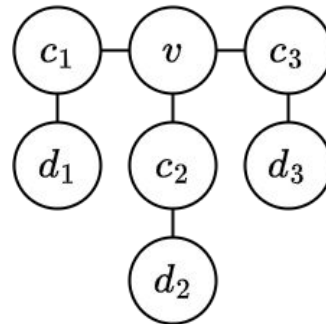
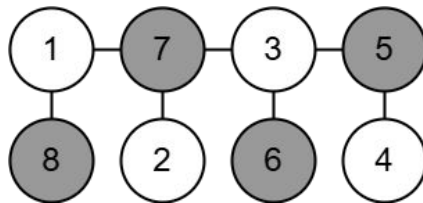
tester : n_o_n_o_n, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- 距離が 2 以下の頂点への移動が可能
- 木 t に対してハミルトンサイクルの個数 $f(t)$ を考える
- 木 T_0 を K 個つなげた木 T について, $f(T)$ の総和を求めたい

解法



- ウ二のとき, $f(t) = N!$
- 葉を消してパスグラフにならないとき, $f(t) = 0$
 - c_i と d_j ($i \neq j$) の距離が3となることに注意して示す
- そうでないとき, $f(t) = 2N * \Pi(\text{隣接する葉の個数})!$
 - おおまかに $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 8$ か $8 \rightarrow 7 \rightarrow \dots \rightarrow 1$ の $2N$ 通り
 - あとは葉の並べ方に自由度



解法

- T_0 を「一直線に」つなぐことだけを考えればよい
 - 左から i 番目までの T_0 をつないだ時の云々, みたいな値を DP に落とし込み, 一般項を求める
 - 組み合わせ的な解釈もできるはず
- $N = 1$ はちょっと大変
 - 積の和典型に帰着できます
 - $K! * 2^{\{K - 3\}}$ が OEIS にある ($K * K! * 2^{\{K - 3\}}$ は無い)



余談

- $K = 1$ の場合を提案
 - 改題案をいくつか考えたところ, 同じ木をつなぐと綺麗に計算できた (アイデアは nonon と karinohito さんから)



J - Median Operations

writer : Dispersion

tester : sotanishy, potato167, tatyam, kotatsugame



問題概要

- $(1, 2, \dots, N)$ の順列 P が与えられる
- 次の操作を何度でもできる
 - 奇数長の区間を選び、中央値 1 つに置き換える
- 最後に残る数字を k にできるか？
 $k = 1, 2, \dots, N$ について判定せよ。



解法

- kを固定した場合
 - k未満を0に、k+1以上を1にした列を考える
 - 結局「01列に対して、操作後の(1の個数) - (0の個数)を最大化せよ」に答えられればよい
 - これは [000 → 0] と [010 → 0] のみを使う貪欲法で求まる



解法

- kに関する列挙
 - さきほどの貪欲法は segtree に乗る
 - 操作後の文字列の接頭辞・接尾辞を高々 3 文字持ちながら、1 点更新・区間演算
 - 計算量は $O(N \log N)$ time



K - Shuffle and Max Bracket Score

writer : toam

tester : sotatnishy, potato167, kotatsugame



問題概要

- Max Bracket Score
 - 長さ $2N$ の数列が与えられる.
 - 正しい括弧列 s に対してスコアを「 $s[i] = '('$ であるような i すべてに対する $A[i]$ の総和」と定義する
 - スコアの最大値は？
- Max Bracket Score の入力がシャッフルされたとき, 答えの期待値を求める



解法

- Max Bracket Score の解き方
 - $A[1]$ のうち少なくとも 1 つはスコアに含まれる
 - $A[1], A[2], A[3]$ のうち少なくとも 2 つはスコアに含まれる
 - $A[1], A[2], A[3], A[4], A[5]$ のうち少なくとも 3 つはスコアに含まれる
 - 貪欲に取っていける. 優先度付きキューを使えば $O(N \log N)$
- Shuffle and Max Bracket Score は, この解法をベースにして, 答えの寄与を計算する



全体テスターによる講評

kotatsugame



kotatsugame による講評

皆さんお疲れさまでした。問題の歯ごたえはいかがでしたでしょうか。もうすごい順位表でしたね。他コンテストと被らなければもうちょっと順位表情報が充実したのに、と残念に思います。Universal Cupではどうなるのか楽しみです。

トップページには「P・Q・R問題が最も簡単」と書いてありますが、まあ**簡単(当社比)**というわけでした。自分も簡単枠と聞いていっちょ揉んだるかいと取り組んだらなかなか解けず、横転、顔ない.....。

正直に言えば、運営陣の中で自分だけ、3番目に簡単な問題はR問題ではないと考えていました。もっと言うとH問題だと推定したのですが、**Openのほうでは**序盤からACが出て安心しました。あれ？

ともかく、大変な5時間だったと思います。改めてお疲れ様でした。